TU Clausthal

Lösungsverfahren für das klassische Ressourcennivellierungsproblem mit Kalendern

Stefan Kreter,

Technische Universität Clausthal

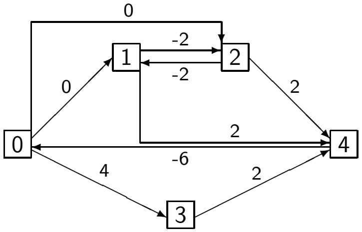
15. DoWoNo, Magdeburg, 30.05.2013

Übersicht

- Einleitung
- Problembeschreibung
- Anwendungsbereiche
- MIP-Modelle
- Heuristische Verfahren
- Forschungsausblick

Projektplanung

- Ein Projekt kann als ein Vorgangs-Knoten-Netzwerk $N = (V, A; \delta)$ dargestellt werden
- $V = \{0, 1, \ldots, n, n+1\}$ besteht aus n realen Vorgängen und zwei fiktiven Vorgängen 0 und $n+1$
- $S_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnet den Startzeitpunkt von Vorgang i
- Mindestabstand $\hat{=}$ Pfeil $\langle i, j \rangle$ mit Gewicht $\delta_{ij} = d_{ij}^{\min}$
- Höchstabstand $\hat{=}$ Rückwärtspfeil $\langle j, i \rangle$ mit Gewicht $\delta_{ji} = -d_{ij}^{\max}$

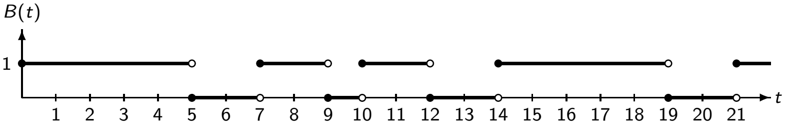


Kalendrierung

- Ein Kalender ist eine Funktion $B : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \{0, 1\}$ wobei:

$$B(t) := \begin{cases} 1, & \text{falls } t \text{ Arbeitszeit ist} \\ 0, & \text{falls } t \text{ in eine Pause fällt.} \end{cases}$$

- $\mathcal{R}$ bezeichnet die Menge der erneuerbaren Ressourcen
- $B_k^{\mathcal{R}}$ wird Ressourcenkalender von Ressource k genannt ($k \in \mathcal{R}$)



Vorgänge

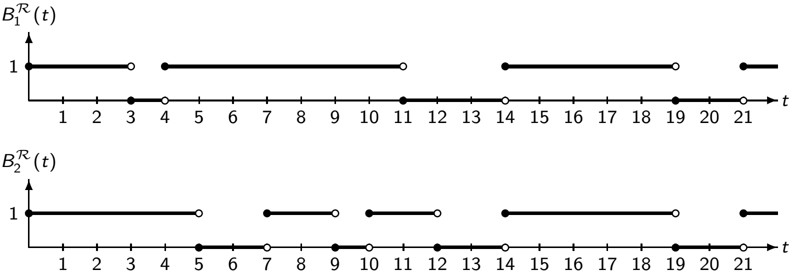
- $p_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ bezeichnet die Dauer von Vorgang $i \in V$
- $V^{bi} \subset V$ ist die Menge der unterbrechbaren Vorgänge
- $V^{ni} = V \setminus V^{bi}$, wobei $i \in V^{ni}$ falls $p_i = 0$, ist die Menge der nicht-unterbrechbaren Vorgänge
- $\mathcal{R}_i$ bezeichnet die Menge der Ressourcen $k \in \mathcal{R}$, die zur Ausführung von Vorgang $i \in V$ benötigt werden
- Ein Vorgangskalender

$$B_i(t) := \begin{cases} \min_{k \in \mathcal{R}_i} B_k^{\mathcal{R}}(t), & \text{falls } \mathcal{R}_i \neq \emptyset \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

kann für jeden Vorgang $i \in V$ bestimmt werden

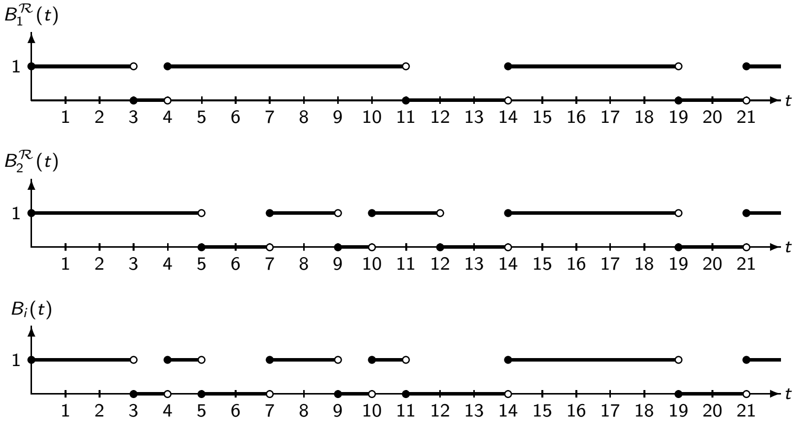
Vorgänge

Beispiel: $i \in V^{bi}$ mit $p_i := 4$ und $\mathcal{R}_i := \{1, 2\}$



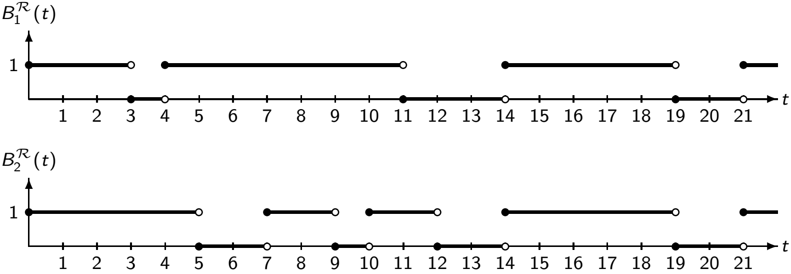
Vorgänge

Beispiel: $i \in V^{bi}$ mit $p_i := 4$ und $\mathcal{R}_i := \{1, 2\}$

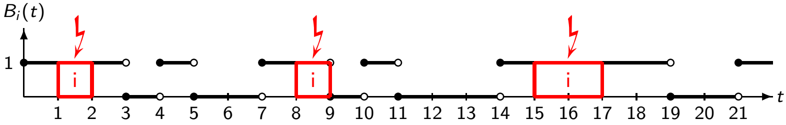


Vorgänge

Beispiel: $i \in V^{bi}$ mit $p_i := 4$ und $\mathcal{R}_i := \{1, 2\}$

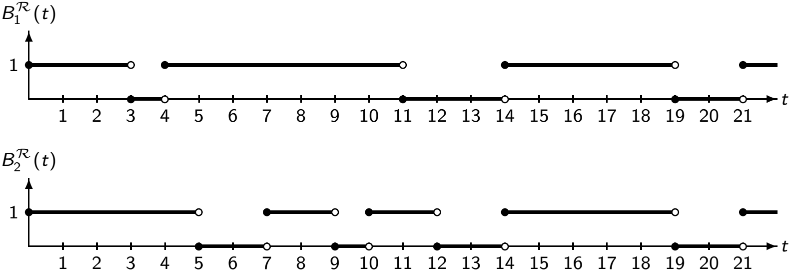


- Vorgänge $i \in V^{bi}$ können nur unterbrochen werden während $B_i(t) = 0$ gilt

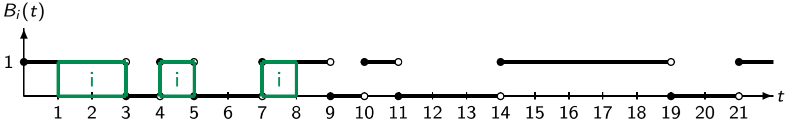


Vorgänge

Beispiel: $i \in V^{bi}$ mit $p_i := 4$ und $\mathcal{R}_i := \{1, 2\}$

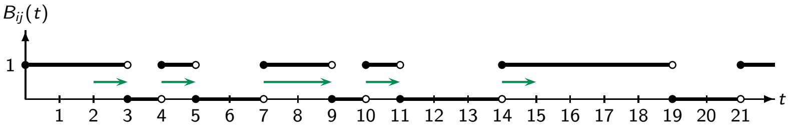


- Vorgänge $i \in V^{bi}$ können nur unterbrochen werden während $B_i(t) = 0$ gilt



Zeitbeziehungen und Schedule

- Allgemeine Anordnungsbeziehungen können in Start-Start Zeitbeziehungen umgewandelt werden (vgl. Franck 1999)
- Für jede Zeitbeziehung zwischen zwei Vorgängen $i, j \in V$ kann ein Pfeilkalender B_{ij} bestimmt werden



$S_i = 2 \;\; \delta_{ij} = 6 \Rightarrow S_j \geq 15$

- $S = (S_0, S_1, \ldots, S_{n+1})$, mit $S_i \geq 0, i \in V$, und $S_0 = 0$, heißt Schedule

Erneuerbare Ressourcen

- r_{ik} bezeichnet die Anzahl der Einheiten von Ressource $k \in \mathcal{R}$, die zu jedem Zeitpunkt der Ausführung von Vorgang i benötigt werden
- Parameter ρ_k:

$$\rho_k := \begin{cases} 1, & \text{falls Ressource } k \text{ während einer Pause belegt bleibt} \\ 0, & \text{falls Ressource } k \text{ während einer Pause frei wird} \end{cases}$$

- Die aktive Menge $\mathcal{A}^{cal}(S, t)$ kann dann wie folgt angegeben werden:

$$\mathcal{A}^{cal}(S, t) := \{i \in V | S_i \leq t < C_i(S_i)\}$$

- Damit kann die Ressourceninanspruchnahme $r_k(S, t)$ von Ressource $k \in \mathcal{R}$ zum Zeitpunkt t bei gegebenem Schedule S berechnet werden

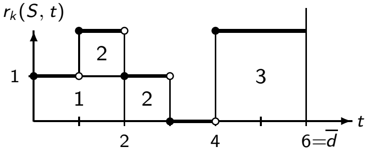
$$r_k(S, t) := \sum_{i: i \in \mathcal{A}^{cal}(S,t) \wedge B_i(t)=1} r_{ik} + \sum_{i: i \in \mathcal{A}^{cal}(S,t) \wedge B_i(t)=0} r_{ik}\, \rho_k$$

Klassisches Ressourcennivellierungsproblem

- Zielfunktion des klassischen Ressourcennivellierungsproblems:

$$f(S) := \sum_{k \in \mathcal{R}} c_k \int_0^{\overline{d}} r_k^2(S,t)\,dt \qquad (RL)$$

- Ressourcenprofil $r_k(S,\cdot) : [0,\overline{d}] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ von Ressource k



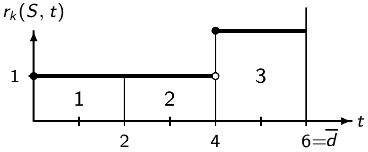
$f(S) = 14$ ($c_k = 1$)

Klassisches Ressourcennivellierungsproblem

- Zielfunktion des klassischen Ressourcennivellierungsproblems:

$$f(S) := \sum_{k \in \mathcal{R}} c_k \int_0^{\overline{d}} r_k^2(S,t)\,dt \qquad (RL)$$

- Ressourcenprofil $r_k(S,\cdot) : [0,\overline{d}] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ von Ressource k



$f(S) = 12$ ($c_k = 1$)

Struktureigenschaften

- Das klassische Ressourcennivellierungsproblem mit Kalendern ist $\mathcal{NP}$-schwer im strengen Sinne
- Die Zielfunktion (RL) ist stetig und lokal konkav
- Eine optimale Lösung ist unter den Extremalpunkten der Abschlüsse der Isoordnungs-Isorelationsmengen zu finden
- Es existiert eine optimale Lösung, die ganzzahlig ist, falls $p_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für alle $i \in V$, $\delta_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle $\langle i, j \rangle \in A$, $S_0 = 0$ und „Start- und Endzeitpunkte von Kalenderunterbrechungen“$\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Anwendungsbereiche

Einzelfertigung

- Hausbau
- Maschinenbau
- Anlagenbau

Gemischt-ganzzahlige lineare Modelle

- START-Formulierung (vgl. Pritsker et al. 1969)

$$x_{it} := \begin{cases} 1, & \text{falls Vorgang } i \text{ zu } t \text{ startet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- EXECUTION-Formulierung (vgl. Kaplan 1988, Neumann and Morlock 1993)

$$\tilde{x}_{it} := \begin{cases} 1, & \text{falls Vorgang } i \text{ zu } t \text{ aktiv ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- CHANGEOVER-Formulierung (vgl. Klein 2000)

$$\hat{x}_{it} := \begin{cases} 1, & \text{falls Vorgang } i \text{ zu } t \text{ oder früher startet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Preprocessing – Vorgänge und Zeitbeziehungen

- ES_i (LS_i): Frühestmöglicher (spätestmöglicher) Startzeitpunkt von Vorgang $i \in V$
- Anpassung des Floyd-Warshall Algorithmus um eine Längste-Wege-Matrix D in Abhängigkeit der Startzeitpunkte zu generieren $\Rightarrow S_j \geq S_i + d_{i,j,S_i}$
- Bestimmung von Mengen N_i, die unzulässige Startzeitpunkte von Vorgang $i \in V$ enthalten
  - $t \in N_i \Leftrightarrow \sum_{\tau=t}^{\min(\overline{d},t+p_i-1)} B_i(\tau) \neq p_i,\ i \in V^{ni}$
  - $t \in N_i \Leftrightarrow B_i(t) = 0,\ i \in V^{bi}$
  - $t \in N_i \Leftrightarrow d_{i,j,t} + d_{j,i,t+d_{i,j,t}} > 0,\ i,j \in V$
- $W_i := \{ES_i, \ldots, LS_i\} \setminus N_i,\ i \in V$

Preprocessing – Ressourcen (vgl. Rieck et al. 2012)

- Bestimmung von minimalen und maximalen Ressourceninanspruchnahmen, R_{kt} bzw. H_{kt}, für jede Ressource $k \in \mathcal{R}$ und jeden Zeitpunkt $t \in \mathcal{T}$

  $\Rightarrow R_{kt} \leq r_k(S, t) \leq H_{kt}$

- Linearisierung der Zielfunktion durch Einführung von Entscheidungsvariablen $y_{kth} \in [0, 1]$

  $$\Rightarrow \sum_{h=1}^{H_{kt}} y_{kth} = r_k(S, t),\ k \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T}$$

START-Formulierung

$$x_{it} := \begin{cases} 1, & \text{falls Vorgang } i \text{ zu } t \text{ startet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Minimiere
$$\sum_{k \in \mathcal{R}} c_k \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h=1}^{H_{kt}} (2h-1)\, y_{kth}$$

u.d.N.
$$\sum_{t \in W_i} (t + d_{ijt})\, x_{it} \leq \sum_{t \in W_j} t\, x_{jt} \qquad i, j \in V, i \neq j \qquad (1)$$

$$\sum_{t \in W_i} x_{it} = 1 \qquad i \in V \qquad (2)$$

$$\sum_{i \in V} r_{ik} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{it}} x_{i\tau}\, B^{kit} \leq \sum_{h=1}^{H_{kt}} y_{kth} \qquad k \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T} \qquad (3)$$

- $\mathcal{T}_{it} := \{\max(ES_i, t - p_{it}^{back} + 1), \ldots, \min(LS_i, t)\}$: Startzeitpunkte von Vorgang i, die $S_i <= t < C_i$ bedingen
- $p_{it}^{back} := t - \max\{\tau \in \mathcal{T} | \sum_{z=\tau}^{t-1} B_i(z) = p_i\}$, mit $\max \emptyset := -1$
- $B^{kit} := B_i(t) + (1 - B_i(t))\rho_k$

Heuristische Verfahren

- Generierungsschema zur Erzeugung von Schedules, die Extremalpunkte der Abschlüsse von Isoordnungs-Isorelationsmengen darstellen
- Einbettung des Generierungsschemas in ein populationsbasiertes lokales Suchverfahren (vgl. Ballestin et al. 2007)
- Einbettung des Generierungsschemas in einen hybriden genetischen Algorithmus

Generierungsschema

Algorithmus Prioritätsregelverfahren

Initialisierung:

Setze $\mathcal{C} := \{0\}$, $S^{\mathcal{C}} := (0)$ und $\overline{\mathcal{C}} := V \setminus \{0\}$.

Bestimme die Distanzmatrix D, sowie die Mengen W_i für alle $i \in V$.

für alle $i \in \overline{\mathcal{C}}$ mit $LS_i = ES_i$ **führe aus:**

Setze $S_i := ES_i$, $\mathcal{C} := \mathcal{C} \cup \{i\}$ und $\overline{\mathcal{C}} := \overline{\mathcal{C}} \setminus \{i\}$.

Hauptschritt:

solange $\mathcal{C} \neq V$ **führe aus:**

Wähle Vorgang j mit höchster Priorität.

Bestimme die Menge $\mathcal{D}_j(S^{\mathcal{C}})$.

Bestimme die größte Minimalstelle S_j^+ von $f^a(S^{\mathcal{C}}, j, \cdot)$ auf $\mathcal{D}_j(S^{\mathcal{C}})$.

Setze $S_j := S_j^+$, $\mathcal{C} := \mathcal{C} \cup \{j\}$ und $\overline{\mathcal{C}} := \overline{\mathcal{C}} \setminus \{j\}$.

ES-LS-Update(j).

für alle $i \in \overline{\mathcal{C}}$ mit $LS_i = ES_i$ **führe aus:**

Setze $S_i := ES_i$, $\mathcal{C} := \mathcal{C} \cup \{i\}$ und $\overline{\mathcal{C}} := \overline{\mathcal{C}} \setminus \{i\}$.

Rückgabe Schedule S

Entscheidungszeitpunkte

Mögliche Startzeitpunkte für den aktuell einzuplanenden Vorgang j, die zu Schedules führen, welche Extremalpunkte des Abschlusses einer Isoordnungs-Isorelationsmenge darstellen:

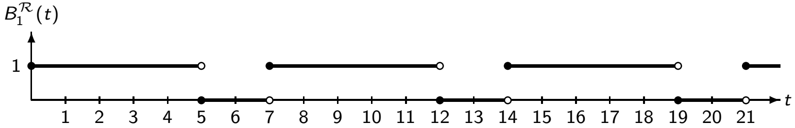
- aktueller ES- und LS-Wert des Vorgangs (Zeitbeziehung bindend)
- Zeitpunkte $t \in W_j$ für die gilt:
  - t ist Endzeitpunkt eines eingeplanten Vorgangs oder
  - $C_j(t)$ ist Startzeitpunkt eines eingeplanten Vorgangs oder
  - t ist Start oder Ende einer Kalenderunterbrechung oder
  - $C_j(t)$ ist Start oder Ende einer Kalenderunterbrechung

Beispiel

$\mathcal{C} = \{0, 1, 4\}$, $S^{\mathcal{C}} = (0, 3, 9)$ und $\overline{\mathcal{C}} = \{2, 3, 5\}$

Vorgang mit höchster Priorität sei 2 mit $ES_2 = 2$, $LS_2 = 7$ und $p_2 = 2$

Es werden zwei erneuerbare Ressourcen benötigt, um die Vorgänge des Projektes auszuführen



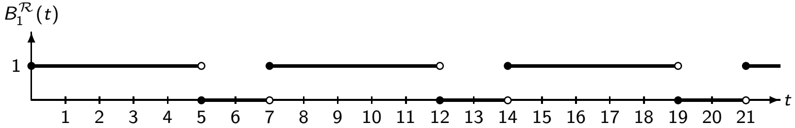
$B_2^{\mathcal{R}}(t) = 1$ für alle t

Beispiel

$\mathcal{C} = \{0, 1, 4\}$, $S^{\mathcal{C}} = (0, 3, 9)$ und $\overline{\mathcal{C}} = \{2, 3, 5\}$

Vorgang mit höchster Priorität sei 2 mit $ES_2 = 2$, $LS_2 = 7$ und $p_2 = 2$

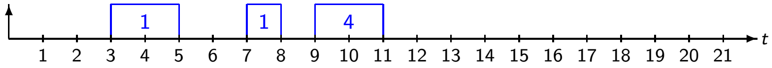
Es werden zwei erneuerbare Ressourcen benötigt, um die Vorgänge des Projektes auszuführen



$B_2^{\mathcal{R}}(t) = 1$ für alle t

Ressourceninanspruchnahmen:

$r_{11} = 3, r_{12} = 2, r_{21} = 0, r_{22} = 1, r_{41} = 1, r_{42} = 1$

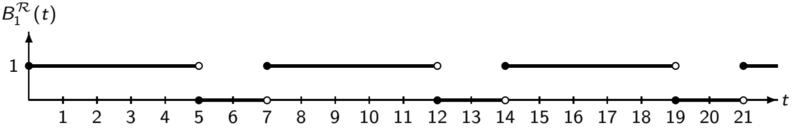


Beispiel

$\mathcal{C} = \{0, 1, 4\}$, $S^{\mathcal{C}} = (0, 3, 9)$ und $\overline{\mathcal{C}} = \{2, 3, 5\}$

Vorgang mit höchster Priorität sei 2 mit $ES_2 = 2$, $LS_2 = 7$ und $p_2 = 2$

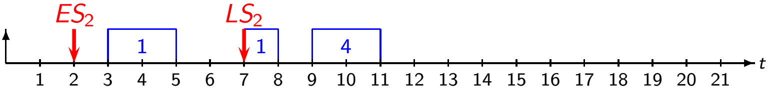
Es werden zwei erneuerbare Ressourcen benötigt, um die Vorgänge des Projektes auszuführen



$B_2^{\mathcal{R}}(t) = 1$ für alle t

Ressourceninanspruchnahmen:

$r_{11} = 3, r_{12} = 2, r_{21} = 0, r_{22} = 1, r_{41} = 1, r_{42} = 1$

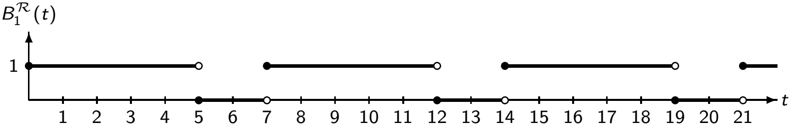


Beispiel

$\mathcal{C} = \{0,1,4\}$, $S^{\mathcal{C}} = (0,3,9)$ und $\overline{\mathcal{C}} = \{2,3,5\}$

Vorgang mit höchster Priorität sei 2 mit $ES_2 = 2$, $LS_2 = 7$ und $p_2 = 2$

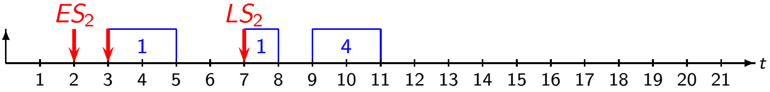
Es werden zwei erneuerbare Ressourcen benötigt, um die Vorgänge des Projektes auszuführen



$B_2^{\mathcal{R}}(t) = 1$ für alle t

Ressourceninanspruchnahmen:

$r_{11} = 3, r_{12} = 2, r_{21} = 0, r_{22} = 1, r_{41} = 1, r_{42} = 1$

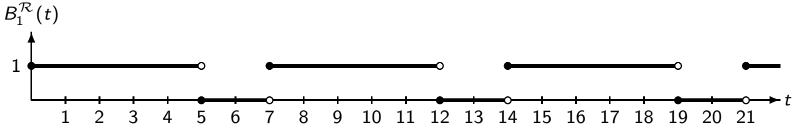


Beispiel

$\mathcal{C} = \{0, 1, 4\}$, $S^{\mathcal{C}} = (0, 3, 9)$ und $\overline{\mathcal{C}} = \{2, 3, 5\}$

Vorgang mit höchster Priorität sei 2 mit $ES_2 = 2$, $LS_2 = 7$ und $p_2 = 2$

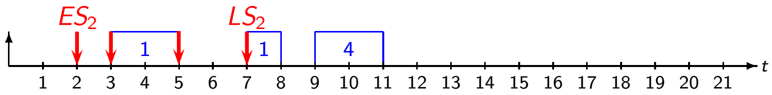
Es werden zwei erneuerbare Ressourcen benötigt, um die Vorgänge des Projektes auszuführen



$B_2^{\mathcal{R}}(t) = 1$ für alle t

Ressourceninanspruchnahmen:

$r_{11} = 3, r_{12} = 2, r_{21} = 0, r_{22} = 1, r_{41} = 1, r_{42} = 1$

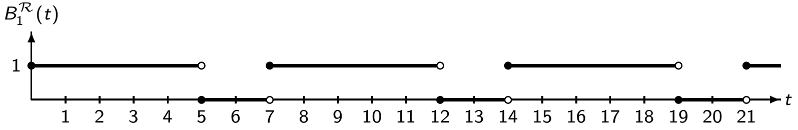


Beispiel

$\mathcal{C} = \{0, 1, 4\}$, $S^{\mathcal{C}} = (0, 3, 9)$ und $\overline{\mathcal{C}} = \{2, 3, 5\}$

Vorgang mit höchster Priorität sei 2 mit $ES_2 = 2$, $LS_2 = 7$ und $p_2 = 2$

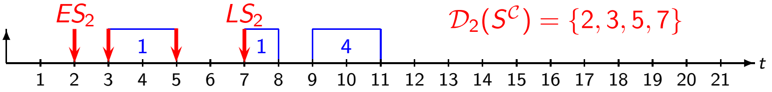
Es werden zwei erneuerbare Ressourcen benötigt, um die Vorgänge des Projektes auszuführen



$B_2^{\mathcal{R}}(t) = 1$ für alle t

Ressourceninanspruchnahmen:

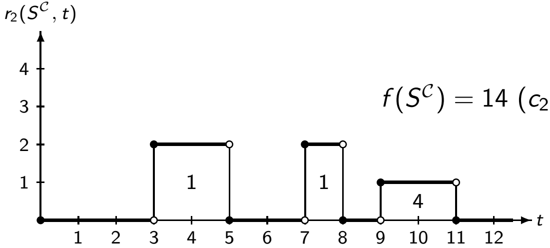
$r_{11} = 3, r_{12} = 2, r_{21} = 0, r_{22} = 1, r_{41} = 1, r_{42} = 1$



Erweiterungskosten

$f^a(S^{\mathcal{C}}, j, t) = f(S^{\mathcal{C}\cup\{j\}}) - f(S^{\mathcal{C}})$

Beispiel:

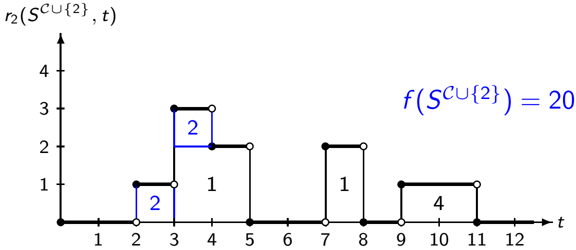


$f(S^{\mathcal{C}}) = 14$ $(c_2 = 1)$

Erweiterungskosten

$f^a(S^{\mathcal{C}}, j, t) = f(S^{\mathcal{C}\cup\{j\}}) - f(S^{\mathcal{C}})$

Beispiel:



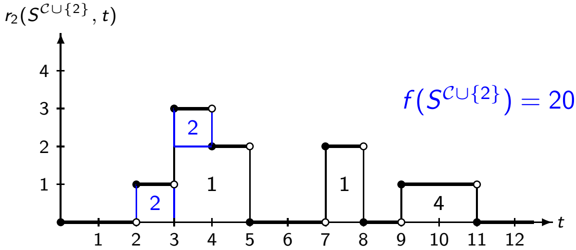
$f(S^{\mathcal{C}\cup\{2\}}) = 20$ ($c_2 = 1$)

Erweiterungskosten

$$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 2) = 6$$

$$f^a(S^{\mathcal{C}}, j, t) = f(S^{\mathcal{C}\cup\{j\}}) - f(S^{\mathcal{C}})$$

Beispiel:



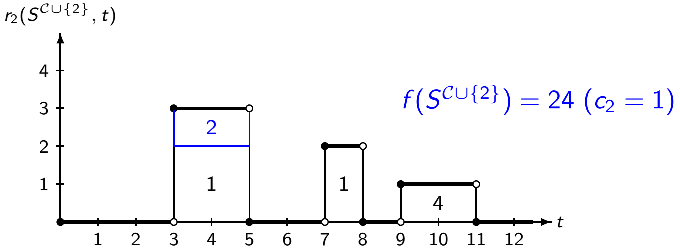
$f(S^{\mathcal{C}\cup\{2\}}) = 20 \ (c_2 = 1)$

Erweiterungskosten

$$f^a(S^{\mathcal{C}}, j, t) = f(S^{\mathcal{C}\cup\{j\}}) - f(S^{\mathcal{C}})$$

$$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 2) = 6$$
$$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 3) = 10$$

Beispiel:

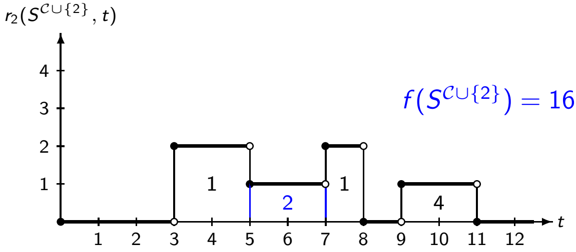


Erweiterungskosten

$$f^a(S^{\mathcal{C}}, j, t) = f(S^{\mathcal{C}\cup\{j\}}) - f(S^{\mathcal{C}})$$

Beispiel:

$$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 2) = 6$$
$$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 3) = 10$$
$$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 5) = 2$$



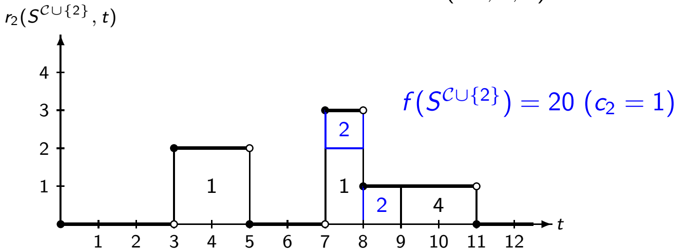
$f(S^{\mathcal{C}\cup\{2\}}) = 16$ $(c_2 = 1)$

Erweiterungskosten

$$f^a(S^{\mathcal{C}}, j, t) = f(S^{\mathcal{C}\cup\{j\}}) - f(S^{\mathcal{C}})$$

$$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 2) = 6$$
$$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 3) = 10$$
$$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 5) = 2$$
$$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 7) = 6$$

Beispiel:

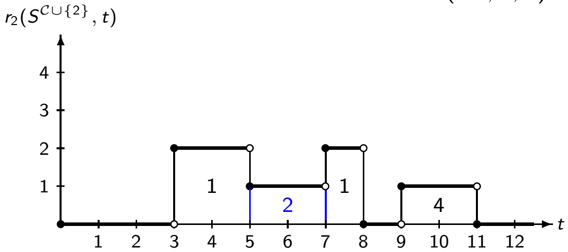


Erweiterungskosten

$f^a(S^{\mathcal{C}}, j, t) = f(S^{\mathcal{C}\cup\{j\}}) - f(S^{\mathcal{C}})$

Beispiel:

$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 2) = 6$
$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 3) = 10$
$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 5) = 2$
$f^a(S^{\mathcal{C}}, 2, 7) = 6$



Forschungsausblick

- Performance Analyse der MIP-Modelle (bis zu 50 reale Vorgänge)
- Performance Analyse der Heuristiken (bis zu 1000 reale Vorgänge)
- Einbeziehung von partiell erneuerbaren Ressourcen
  - Viele Struktureigenschaften entfallen
  - Unterbrechbarkeit muss erweitert werden
  - Entwerfen von Lösungsverfahren
  - Performance Analyse

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!